ACTIVITÉS (IN)CONGRUES

Billets de banque et cartes de crédit

Université de Limoges

IREM Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques
http://www.irem.unilim.fr/

2017/2019

I/ Première partie : Les billets de banque

Les numéros de billets de banque

Depuis le 2 mai 2013 (*), une nouvelle série de billets de banque est imprimée par différents pays de l'union économique européenne. Les billets en euros sont numérotés selon des règles particulières. Ils présentent un numéro horizontal composé de deux lettres suivies de 10 chiffres.

Code du billet : $\overbrace{\underbrace{U}_{\text{Imprimeur du billet}}\ \underbrace{B}_{\text{Incrément du numéro de série}}\ \underbrace{9\,139\,528\,712}_{\text{n° de série}}}^{\text{2 lettres et 10 chiffres}}$

Voici, à titre indicatif, la liste des imprimeurs européens :

Lettre	Imprimeur	Ville	Lettre	Imprimeur	Ville
D	Polska Wytwórnia Papierów Wartościowych	Varsovie (Pologne)	E	Oberthur Fiduciaire	Chantepie (France)
H	De La Rue Currency	Loughton (Royaume-Uni)	J	De La Rue Currency	Gateshead (Royaume-Uni)
M	Valora	Carregado (Portugal)	N	Banque nationale d'Autriche	Vienne (Autriche)
P	Johan Enschede & Zn	Haarlem (Pays-bas)	R	Imprimerie fédérale	Berlin (Allemagne)
S	Banque d'Italie	Rome (Italie)	T	Banque centrale d'Irlande	Dublin (Irlande)
U	Banque de France	Chamalières (France)	V	Maison royale de la monnaie	Madrid (Espagne)
W	Giesecke & Devrient	Leipzig (Allemagne)	X	Giesecke & Devrient	Munich (Allemagne)
Y	Banque de Grèce	Athènes (Grèce)	Z	Banque nationale de Belgique	Bruxelles (Belgique)

Procédure de validation d'un numéro de billet de banque

1. On remplace d'abord les deux premières lettres par leur code ASCII selon la table suivante :

A = 65	B = 66	C = 67	D = 68	E = 69	F = 70	G = 71	H = 72	I = 73	J = 74	K = 75	L = 76	M = 77
N = 78	O = 79	P = 80	Q = 81	R = 82	S = 83	T = 84	U = 85	V = 86	W = 87	X = 88	Y = 89	Z = 90

2. Si le nouveau numéro obtenu (14 chiffres) est divisible par 9, alors le numéro est valide.

Exemple n°1 : Avec le billet de l'exemple ci-dessus, nous obtenons alors un nombre de 14 chiffres que nous notons N :

$$U \longmapsto 85\,; \quad B \longmapsto 66\,; \quad N = \underbrace{85}_{\text{U}}\underbrace{66}_{\text{B}}9139528712$$

Si le numéro obtenu, considéré comme nombre de 14 chiffres, est divisible par 9, alors le numéro est valide.

Propriété : Critère de divisibilité par 9 [1]

La divisibilité d'un nombre N par le nombre 9 peut s'exprimer d'au moins trois façons.

« Un entier naturel n est divisible par 9 si et seulement si :

— le reste de la division de N par 9 est nul,

— ou $N \equiv 0 \pmod 9$ (prononcer «N *est congru à* 0 *modulo* 9» (*)),

— ou la somme de ses chiffres est un multiple de 9. »

(†). voir les informations annexes en page 6.

Activité : Vérification d'un numéro de billet

1

On considère le numéro du billet ci-contre.

— On obtient : $U =$ ___ et $B =$ ___

— Le nombre à 14 chiffres est alors :
$N =$_________________

— On vérifie que la somme des chiffres de N est bien multiple de 9 : ……………………

— On conclut : ……………………

Vérifier la validité des numéros de billets suivants :

RA5686098657	VA4762449011	EB2428415549

Activité : Congruence à zéro modulo neuf

2

1. Ci-contre, voici les numéros de 3 billets neufs, valides et consécutifs à la sortie d'un distributeur automatique. Que remarque-t-on ?
2. Les nombres ci-dessous sont-ils des multiples de 9 ?

592929292	90817000026354	91111911119
9081726354	99111111111	99996669999

3. Ajouter un chiffre pour que les nombres ci-dessous soient congrus à 0 modulo 9 :

92929292__	908170000264__	111111183__
9126354__	311111111__	999999985__

Activité : Recherche d'un chiffre manquant

3

1. Un chiffre de chacun de ces numéros de billets a été effacé, sauriez-vous le retrouver ?

EB242❓415549	UD924❓118679	VA45615❓9152

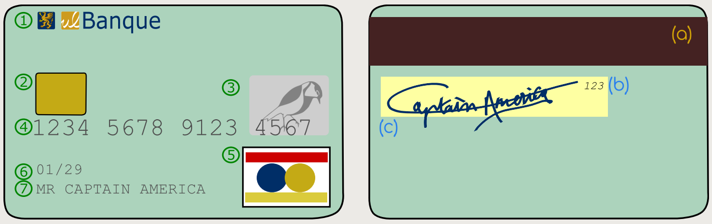
2. Combien de billets différents un imprimeur peut-il produire par ce principe de numérotation ?

II/ Deuxième partie : Étude de numéros de cartes bancaires

Les numéros de cartes bancaires

Un numéro de carte bancaire est généralement une suite formée de 16 chiffres constituée de 4 blocs de 4 chiffres séparés par des espaces (repère ④ ci-dessous).

① Logo de la banque
② Puce électronique
③ Hologramme
④ Numéro de la carte
⑤ Fabricant
⑥ Date de fin de validité
⑦ Nom du titulaire



(a) Bande magnétique
(b) Cryptogramme
(c) Signature du titulaire

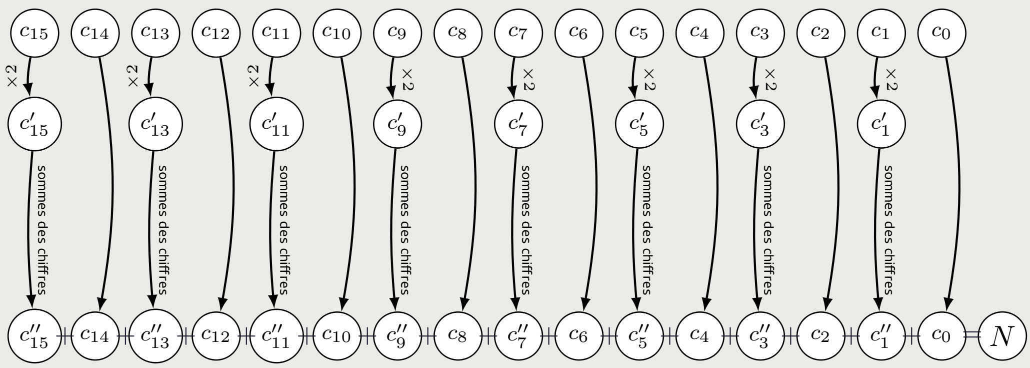
Ce numéro international se décompose de la manière suivante :

$$\text{Code à 16 chiffres de la carte : } \overbrace{\underbrace{1234\quad 56}_{\text{Numéro de la banque}}\underbrace{78\quad 9123\quad 456}_{\text{Numéro du client}}\quad \underbrace{7}_{\text{Clé de contrôle}}}^{\text{16 chiffres}}$$

Procédure de validation d'un numéro de carte bancaire: algorithme de Luhn

Il est possible de vérifier si le numéro de la carte est valide par l'algorithme de Luhn décrit ci-dessous :

1. En partant de la droite, on numérote les chiffres de 0 à 15.
2. En partant de la droite, on extrait les chiffres de rang impair :
   a) On multiplie le chiffre par 2,
   b) On effectue la somme des chiffres du nombre obtenu.
   Selon ce principe, 5 devient 1 ($5 \mapsto 5 \times 2 = 10 \mapsto 1 + 0 = 1$), 6 devient 3 ($6 \mapsto 6 \times 2 = 12 \mapsto 1 + 2 = 3$), etc.
3. On effectue la somme de tous les chiffres obtenus.
4. En partant de la droite, on extrait les chiffres de rang pair et on les ajoute à la somme précédente.
5. Le numéro est valide si la somme finale N est un multiple de 10.



Propriété : Critère de divisibilité par 10 2

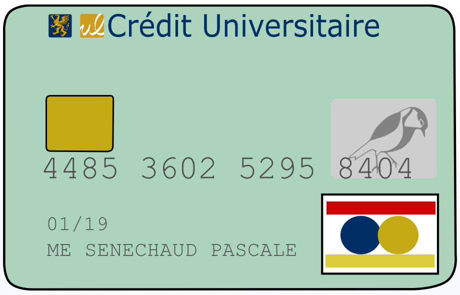
La divisibilité d'un nombre N par le nombre 10 peut s'exprimer d'au moins trois façons.
« Un entier naturel n est divisible par 10 si et seulement si :

- le reste de la division de N par 10 est nul,
- ou $N \equiv 0 \pmod{10}$ (N *est congru à* 0 *modulo* 10),
- ou le nombre N se termine par 0. »

Activité : Vérification d'un numéro de carte bancaire 4

Le numéro initial à 16 chiffre est 4485 3602 5295 8404.
Compléter le tableau permettant d'appliquer l'algorithme de Luhn:

4	4	8	5	3	6	0	2	5	2	9	5	8	4	0	4
8	↓	16	↓	6	↓		↓		↓		↓		↓	0	↓
8	4	7	5	6									4	0	4



On obtient donc:
$N = 8+4+7+5+6+\cdots+\cdots+\cdots+\cdots+\cdots+\cdots+\cdots+\cdots+\cdots+4+0+4$
On obtient par conséquent:
$N = 70 \equiv 0 \pmod{10}$
Conclusion: Le numéro de carte ....

Activité : Vérification d'autres numéros de cartes bancaires 5

Vérifier la validité des numéros de cartes suivants :

4929 0679 3495 9510   5117 9891 7693 1734   4716 8808 0047 0884

....

....

Activité : Recherche d'un chiffre manquant 6

1. Un chiffre de chacun de ces numéros de carte bancaire a été effacé, sauriez-vous le retrouver ?

   4532 818?5109 0749   5306 ?566 1384 7292   5541 3325 92?0 6917

   ....

2. Est-il possible de trouver plusieurs propositions pour un chiffre manquant ?

   ....

   ....

III/ Informations annexes

Congruence de deux entiers modulo neuf,

En arithmétique, on dit que *deux entiers a et b sont congrus modulo neuf* (on écrit $a \equiv b \mod 9$) **si leur différence est un multiple de neuf**. Ce qui équivaut à dire que a **et** b **ont même reste dans la division euclidienne par neuf**.
Pour tout entier a, il existe un unique entier naturel r tel que $a \equiv r \mod 9$ avec $0 \leq r < 9$. C'est le reste de a dans la division euclidienne par neuf. On le note $a \mod 9$ (ou a modulo 9).
Si « N modulo 9 » vaut 0, on dit alors que « N est congru à 0 modulo 9 » et cela s'écrit : $N \equiv 0 \pmod 9$.
Ainsi « 90 modulo 9 » vaut 0 ($90 \equiv 0 \pmod 9$), « 85 modulo 9 » vaut 4 ($85 \equiv 4 \pmod 9$), « 18 modulo 9 » vaut 0 ($18 \equiv 0 \pmod 9$), « 15 modulo 9 » vaut 6 ($15 \equiv 6 \pmod 9$)...
Tous les nombres strictement inférieurs à neuf sont égaux au reste de leur division euclidienne par neuf.

La Preuve par neuf

Le reste de la division par 9 d'un entier positif n, que l'on note « n modulo 9 », est très utile. Il se calcule simplement en faisant la somme des chiffres de n, puis en recommençant si ce que l'on a obtenu demeure supérieur à 9. Et ainsi de suite.
Pour 35 581 929, par exemple, on calcule $3+5+5+8+1+9+2+9=42$, puis $4+2=6$; donc 35 581 929 modulo 9 est égal à 6. Pour le justifier, on remarque que 10^n est égal à $99\ldots9+1$, c'est-à-dire à 1 modulo 9.
La « preuve par 9 » d'une multiplication consiste à vérifier que la valeur modulo 9 du résultat qu'on a calculé est le produit des valeurs modulo 9 des facteurs. La méthode fonctionne avec les additions, les soustractions et les divisions.
Supposons que l'on veuille vérifier l'opération $2537 \times 823 = 2\,087\,951$. On calcule les valeurs modulo 9 des facteurs : 2537 donne $2+5+3+7=17$ qui donne 8, et 823 donne $8+2+3=13$ qui donne 4. Le produit de ces valeurs est 32, qui vaut 5 modulo 9. On doit donc trouver 5 modulo 9 pour le résultat 2 087 951. Et en effet, on a $2+0+8+7+9+5+1=32$, qui est égal à 5 modulo 9.
L'opération est donc probablement juste. La certitude n'est pas de 100%, car on peut faire une erreur qui conduise quand même à la valeur attendue.

Jean-Paul DELAHAYE, *La preuve par neuf*, Mag. Pour la Science, n° 472, Février 2017

Quelques données chiffrées sur l'économie

Le nombre et la valeur des billets de banque en circulation au mois d'octobre 2017 donne le tournis. Les données suivantes sont extraites du site de la banque centrale européenne et ne représentent qu'une partie de tout l'argent en circulation. En effet, les tableaux ci-dessous ne font apparaître ni la monnaie scripturale (non faite de billets et de pièces, comme les chèques et les monnaies virtuelles) ni les pièces de monnaie.

Nombre de billets (en millions) en circulation dans l'union européenne :

5€	10€	20€	50€	100€	200€	500€	Total
1829	2429	3692	9539	2573	243	514	20820

Valeur des billets (en milliards d'€) en circulation dans l'union européenne :

5€	10€	20€	50€	100€	200€	500€	Total
9,1	24,3	73,8	476,9	257,3	48,7	256,8	1147

source : http://www.ecb.europa.eu/stats/policy_and_exchange_rates/banknotes+coins/circulation/html/index.en.html